

# BAB 6 FUNGSI TRIGONOMETRI

## Bhgn 2

---

Matematik Tambahan Tingkatan 5 KSSM

Oleh Cikgu Norazila Khalid

Smk Ulu Tiram, Johor



# Identiti Asas

---

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

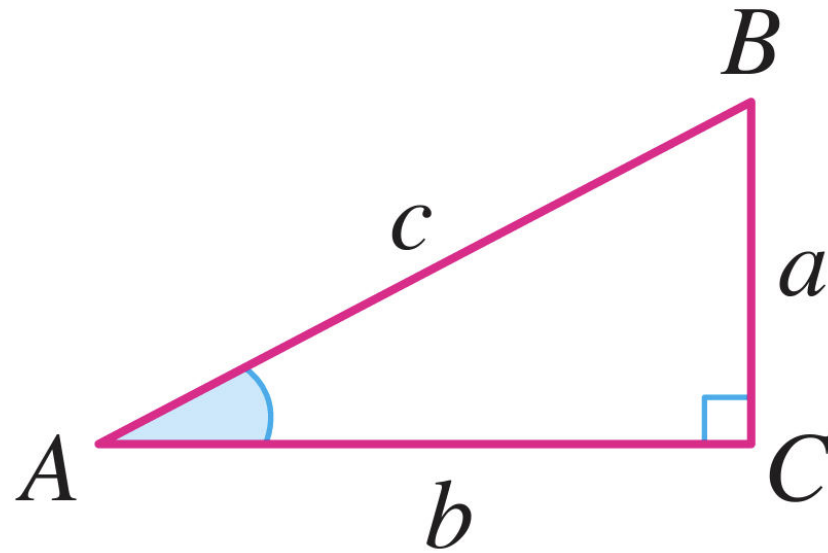
Identiti trigonometri ialah persamaan yang melibatkan fungsi trigonometri dan sah untuk sebarang nilai sudut. Identiti trigonometri yang telah dipelajari adalah seperti berikut:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \text{ dan } \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

## Identiti Asas

---

- $\sin A = \frac{a}{c}$ , kosek  $A = \frac{c}{a}$
- $\cos A = \frac{b}{c}$ , sek  $A = \frac{c}{b}$
- $\tan A = \frac{a}{b}$ , kot  $A = \frac{b}{a}$



## Identiti Asas

---

$\div a^2$

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$$

$\div b^2$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

$$1 + \tan^2 A = \operatorname{sek}^2 A$$

$\div c^2$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

# Identiti Asas

---

**Contoh**

**17**

Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $\sin^2 (-430^\circ) + \cos^2 (-430^\circ)$

(b)  $\tan^2 \left(\frac{\pi}{3}\right) - \sec^2 \left(\frac{\pi}{3}\right)$

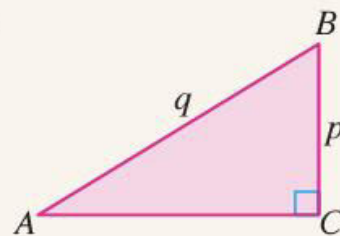
**Penyelesaian**

(a)  $\sin^2 (-430^\circ) + \cos^2 (-430^\circ) = 1$

(b)  $\tan^2 \left(\frac{\pi}{3}\right) - \sec^2 \left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$

## Latihan Kendiri 6.6

1. Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap yang berikut.
  - (a)  $\cos^2 80^\circ + \sin^2 80^\circ$
  - (b)  $\sec^2 173^\circ - \tan^2 173^\circ$
  - (c)  $1 - \cos^2 45^\circ$
  - (d)  $\operatorname{cosec}^2 \frac{8}{5}\pi - \cot^2 \frac{8}{5}\pi$
2. Diberi  $\cos \theta = m$ , tentukan nilai yang berikut dalam sebutan  $m$ .
  - (a)  $\sec^2 \theta$
  - (b)  $\sin^2 \theta$
  - (c)  $\cot^2 \theta$
3. Diberi bahawa  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  dan  $\tan \theta = 3$ . Tanpa menggunakan segi tiga bersudut tegak, cari nilai  $\sin \theta$  dan  $\cos \theta$ .
4. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga bersudut tegak  $ABC$ . Tulis ungkapan yang berikut dalam sebutan  $p$  dan/atau  $q$ .
  - (a)  $1 - \cos^2 A$
  - (b)  $\operatorname{cosec}^2 A - 1$
  - (c)  $1 - \sec^2 A$



**Contoh****18**

Buktikan setiap identiti trigonometri yang berikut.

(a)  $1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1$

(b)  $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$

**Penyelesaian**

(a)  $1 - 2 \sin^2 A$

$= 1 - 2(1 - \cos^2 A)$

$= 1 - 2 + 2 \cos^2 A$

$= 2 \cos^2 A - 1$

Gunakan identiti  
 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

Maka, terbukti bahawa  $1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1$

$$(b) \tan A + \cot A$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A}$$

$$= \frac{1}{\cos A \sin A}$$

$$= \sec A \operatorname{cosec} A$$

Gunakan identiti

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \text{ dan } \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

Gunakan identiti  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

Gunakan identiti

$$\frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A \text{ dan } \frac{1}{\cos A} = \sec A$$

Maka, terbukti bahawa  $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$

**Contoh 19**

Buktikan bahwa  $\tan^2 x - \sec^2 x + 2 = \operatorname{kosek}^2 x - \operatorname{kot}^2 x$ .

**Penyelesaian**

Sebelah kiri:  $\tan^2 x - \sec^2 x + 2 = (-1) + 2$

$$= 1 \quad \leftarrow \text{Gunakan identitas } 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

Sebelah kanan:  $\operatorname{kosek}^2 x - \operatorname{kot}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \quad \leftarrow \text{Gunakan identitas } \frac{1}{\sin x} = \operatorname{kosek} x \text{ dan } \frac{1}{\tan x} = \operatorname{kot} x$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x} \quad \leftarrow \text{Gunakan identitas } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= 1$$

Maka,  $\tan^2 x - \sec^2 x + 2 = \operatorname{kosek}^2 x - \operatorname{kot}^2 x = 1$ .

## Latihan Mandiri 6.7

1. Buktikan setiap identiti trigonometri yang berikut.

(a)  $3 \sin^2 A - 2 = 1 - 3 \cos^2 A$

(c)  $\sec A \operatorname{cosec} A - \tan A = \cot A$

(e)  $\cot^2 \theta - \tan^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - \sec^2 \theta$

(g)  $\tan^2 \theta (\operatorname{cosec}^2 \theta - 1) = 1$

(b)  $1 + 2 \tan^2 A = \frac{1 - \sin^4 A}{\cos^4 A}$

(d)  $\cos^2 A - \sin^2 A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

(f)  $\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} = 1 - \cos \theta$

(h)  $\frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = \cos \theta + \sin \theta$

## Latihan Formatif

6.3

Kuiz

[bit.ly/37k9eON](https://bit.ly/37k9eON)



1. Diberi  $\sec^2 \theta = p$ , cari nilai bagi setiap yang berikut, dalam sebutan  $p$ .

(a)  $\tan^2 \theta$

(b)  $\cos^2 \theta$

(c)  $\sin^2 \theta$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $\sin^2 100^\circ + \cos^2 100^\circ$

(b)  $\tan^2 3 \text{ rad} - \sec^2 3 \text{ rad}$

(c)  $1 + \tan^2 120^\circ$

(d)  $1 + \cot^2 225^\circ$

3. Buktikan setiap yang berikut.



(a)  $\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \sin^2 x$

(b)  $5 \sec^2 x + 4 = 9 \sec^2 x - 4 \tan^2 x$

(c)  $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta$

(d)  $\sec^4 \theta - \sec^2 \theta = \tan^4 \theta + \tan^2 \theta$

4. Persamaan yang berikut adalah benar bagi semua nilai  $\theta$ .



$$\frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} = 2 \operatorname{cosec}^2 \theta$$

- (a) Buktikan persamaan tersebut.
- (b) Seterusnya, cari nilai  $\operatorname{cosec}^2 \theta$  jika  $\cos \theta = 0.6$ .

5. Setiap identiti yang berikut menunjukkan hubungan yang melibatkan  $\sec y$ . Buktikan setiap identiti yang berikut.



- (a)  $\sec y = \sin y \tan y + \cos y$
- (b)  $\sec y = \frac{\tan y + \cot y}{\operatorname{cosec} y}$
- (c)  $\sec y = \frac{1 - \sin y}{2 \cos y} + \frac{\cos y}{2 - 2 \sin y}$

# Rumus Sudut Majmuk dan Rumus Sudut Berganda

---

Pertimbangkan contoh yang berikut:

$$\sin (30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

Walau bagaimanapun,  $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = 0.5 + 0.866 \neq 1$

Maka,  $\sin (30^\circ + 60^\circ) \neq \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ .

Secara amnya,  $\sin (A + B) \neq \sin A + \sin B$ .

Membuktikan identiti trigonometri dengan menggunakan  
rumus sudut majmuk

---

- $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
- $\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

rumus sudut  
majmuk

---

**Contoh 20**

Cari nilai bagi setiap ungkapan yang berikut dengan menggunakan rumus sudut majmuk. Seterusnya, semak jawapan yang diperoleh menggunakan kalkulator.

(a)  $\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ$

(b)  $\cos 50^\circ \cos 20^\circ + \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(c)  $\frac{\tan 70^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 70^\circ \tan 10^\circ}$

**Penyelesaian**

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sin (63^\circ + 27^\circ) \\ &= \sin 90^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \cos (50^\circ - 20^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & \tan (70^\circ - 10^\circ) \\ &= \tan 60^\circ \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

**Contoh 21**

Buktikan setiap identiti yang berikut.

(a)  $\sin (90^\circ + A) = \cos A$

(b)  $\sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$

**Penyelesaian**

(a)  $\sin (90^\circ + A)$   
 $= \sin 90^\circ \cos A + \cos 90^\circ \sin A$   
 $= (1) \cos A + (0) \sin A$   
 $= \cos A$

(b)  $\sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$   
 $= \sin x \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos x \sin \left(\frac{\pi}{6}\right) - \left(\sin x \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos x \sin \left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$   
 $= \sin x \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos x \sin \left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin x \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos x \sin \left(\frac{\pi}{6}\right)$   
 $= 2 \cos x \sin \left(\frac{\pi}{6}\right)$   
 $= 2 \cos x \left(\frac{1}{2}\right)$   
 $= \cos x$

Contoh

22

Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai yang berikut.

(a)  $\sin 105^\circ$

(b)  $\tan 15^\circ$

Penyelesaian

(a)  $\sin 105^\circ$

$$= \sin (45^\circ + 60^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

(b)  $\tan 15^\circ$

$$= \tan (60^\circ - 45^\circ)$$

$$= \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + (\sqrt{3})(1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$



Imbas Kembali

	sin	kos	tan
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$



**Contoh 23**

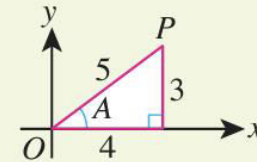
Diberi  $\sin A = \frac{3}{5}$ ,  $0^\circ < A < 90^\circ$  dan  $\sin B = -\frac{12}{13}$ ,  $90^\circ < B < 270^\circ$ . Cari

(a)  $\sin(A + B)$

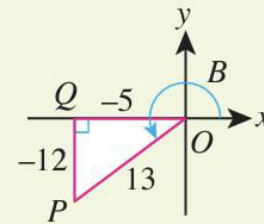
(b)  $\tan(B - A)$

**Penyelesaian**

$$\begin{aligned} \text{(a) } \sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) \\ &= \frac{-15 - 48}{65} \\ &= -\frac{63}{65} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{(b) } \tan(B - A) &= \frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B \tan A} \\ &= \frac{\left(\frac{-12}{-5}\right) - \left(\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(\frac{-12}{-5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{48 - 15}{20}\right)}{1 + \left(\frac{36}{20}\right)} \\ &= \left(\frac{33}{20}\right) \times \left(\frac{20}{56}\right) \leftarrow \frac{33}{20} \div \frac{56}{20} = \frac{33}{20} \times \frac{20}{56} \\ &= \frac{33}{56} \end{aligned}$$



**Tip Pintar**

Berdasarkan rajah dalam Contoh 23:

- $\sin A = \frac{3}{5}$ ,  $\sin B = -\frac{12}{13}$
- $\cos A = \frac{4}{5}$ ,  $\cos B = -\frac{5}{13}$
- $\tan A = \frac{3}{4}$ ,  $\tan B = \frac{12}{5}$

**Kuiz Pantas**

Berdasarkan Contoh 23, tentukan nilai bagi setiap yang berikut:

- (a) kosok  $(A + B)$
- (b) sek  $(A - B)$
- (c) kot  $(B - A)$

## Latihan Kendiri 6.8

1. Buktikan setiap identiti trigonometri yang berikut.



$$(a) \sin(x - y) - \sin(x + y) = -2 \cos x \sin y \quad (b) \tan\left(A + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$$

$$(c) \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\sin(x + y) + \sin(x - y)} = \tan y \quad (d) \cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap yang berikut.

$$(a) \cos 75^\circ \quad (b) \operatorname{cosec} 105^\circ \quad (c) \cot 195^\circ$$

3. Diberi  $\cos x = -\frac{5}{13}$  bagi  $0 < x < \pi$  dan  $\sin y = -\frac{3}{5}$  bagi  $\frac{\pi}{2} < y < \frac{3}{2}\pi$ , cari nilai bagi setiap yang berikut.

$$(a) \sin(x + y) \quad (b) \cos(x - y) \quad (c) \cot(x + y)$$

**sin 2A**

- Diberi  $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- Jika gantikan  $B$  dengan  $A$ ,  
 $\sin (A + A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A$   
Maka,  **$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$**

# Menerbitkan rumus sudut berganda

---

### kos 2A

- Diberi  $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- Jika gantikan  $B$  dengan  $A$ ,  
 $\cos(A + A) = \cos A \cos A - \sin A \sin A$ .  
Maka,  **$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$**
- Jika gantikan  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$  ke dalam  $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ ,  
 $\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$   
 $= 2 \cos^2 A - 1$   
Maka,  **$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$**
- Jika gantikan  $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$  ke dalam  $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ ,  
 $\cos 2A = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A$   
 $= 1 - 2 \sin^2 A$   
Maka,  **$\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$**

# Menerbitkan rumus sudut berganda

---

**tan 2A**

- Diberi  $\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

- Jika gantikan  $B$  dengan  $A$ ,

$$\tan (A + A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$$

Maka,  $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

# Menerbitkan rumus sudut berganda

---

**Contoh 24**

Cari nilai bagi setiap ungkapan yang berikut menggunakan rumus sudut berganda. Seterusnya, tentusahkan jawapan yang diperoleh menggunakan kalkulator.

(a)  $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$

(b)  $\cos^2 22.5^\circ - \sin^2 22.5^\circ$

(c)  $\frac{2 \tan 75^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ}$

**Penyelesaian**

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \\ &= \sin 2(15^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & \cos^2 22.5^\circ - \sin^2 22.5^\circ \\ &= \cos 2(22.5^\circ) \\ &= \cos (45^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & \frac{2 \tan 75^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ} \\ &= \tan 2(75^\circ) \\ &= \tan 150^\circ \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$



**Contoh**

**25**

Buktikan setiap identiti yang berikut.

(a)  $\text{kosek } 2A = \frac{1}{2} \text{ sek } A \text{ kosek } A$

(b)  $\text{kos } \theta - \sin \theta = \frac{\text{kos } 2\theta}{\text{kos } \theta + \sin \theta}$

## Penyelesaian

(a) Diberi  $\text{kosek } 2A = \frac{1}{2} \text{ sek } A \text{ kosek } A$

Bukti: Sebelah kiri =  $\text{kosek } 2A$

$$= \frac{1}{\sin 2A}$$

Gunakan identiti  $\text{kosek } 2A = \frac{1}{\sin 2A}$

$$= \frac{1}{2 \sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ sek } A \text{ kosek } A$$

Gunakan identiti

$$\frac{1}{\sin A} = \text{kosek } A \text{ dan } \frac{1}{\cos A} = \text{sek } A$$

(b) Diberi  $\text{kos } \theta - \sin \theta = \frac{\text{kos } 2\theta}{\text{kos } \theta + \sin \theta}$

Bukti: Sebelah kanan =  $\frac{\text{kos } 2\theta}{\text{kos } \theta + \sin \theta}$

$$= \frac{(\text{kos}^2 \theta - \text{sin}^2 \theta)}{\text{kos } \theta + \sin \theta} \times \frac{(\text{kos } \theta - \sin \theta)}{(\text{kos } \theta - \sin \theta)}$$

$$= \frac{(\text{kos}^2 \theta - \text{sin}^2 \theta) (\text{kos } \theta - \sin \theta)}{(\text{kos}^2 \theta - \text{sin}^2 \theta)}$$

$$= \text{kos } \theta - \sin \theta$$

Gunakan identiti

$\text{kos } 2\theta = \text{kos}^2 \theta - \text{sin}^2 \theta$  dan darabkan dengan konjugat

Membuktikan  
identiti  
trigonometri  
dengan  
menggunakan  
rumus sudut  
berganda

- $\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$

- $\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$

- $\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sin A}{1 + \cos A}}$

**Contoh 26**

Buktikan bahawa  $\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ .

**Penyelesaian**

$$\begin{aligned} \text{Sebelah kanan} &= \frac{1 - \cos x}{\sin x} \\ &= \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2})}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \\ &= \tan \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Gunakan  
 $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$   
maka,  $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

Maka, terbukti bahawa  $\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ .



## Latihan Kendiri 6.9

1. Tanpa menggunakan kalkulator, tentukan nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$       (b)  $\cos^2 165^\circ - \sin^2 165^\circ$       (c)  $\frac{1 - \tan^2 75^\circ}{2 \tan 75^\circ}$

2. Buktikan bahawa  $\operatorname{kosek} 2A = \frac{1}{2} \operatorname{sek} A \operatorname{kosek} A$ .

3. Buktikan setiap identiti yang berikut.



(a)  $\sin 2\theta(\tan \theta + \cot \theta) = 2$

(b)  $\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x + 1} = \tan 2x$

(c)  $\operatorname{kosek} 2A + \cot 2A = \cot A$

(d)  $\operatorname{sek} 2x = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$

4. Diberi  $\sin x = \frac{4}{5}$  dengan  $x$  ialah sudut tirus dan  $\sin y = \frac{5}{13}$  dengan  $y$  ialah sudut cakah, cari

(a)  $\operatorname{kosek} 2x$

(b)  $\operatorname{sek} 2y$

(c)  $\sin \frac{x}{2}$

(d)  $\tan \frac{y}{2}$



4. Buktikan setiap identiti yang berikut.



$$(a) \cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$$

$$(b) \tan y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\sin(x - y) + \sin(x + y)}$$

5. Diberi  $\tan \theta = t$  bagi  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Ungkapkan setiap yang berikut dalam sebutan  $t$ .

$$(a) \sin 2\theta$$

$$(b) \cos 2\theta$$

$$(c) \tan 2\theta$$

$$(d) \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$(e) \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

6. Buktikan setiap identiti yang berikut.

$$(a) \tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$(b) \sec^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{2}{1 + \cos \theta}$$

$$(c) \sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

7. Dengan menggunakan identiti sudut majmuk, tunjukkan bahawa



$$(a) \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$$

$$(b) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

$$(c) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

# Aplikasi Fungsi Trigonometri

---

**Contoh 27**

Selesaikan persamaan yang berikut bagi  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ .

(a)  $\sin \theta = -0.5446$

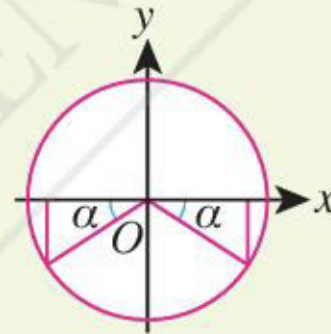
(b)  $\cos 2\theta = 0.3420$

**Penyelesaian**

(a)  $\sin \theta = -0.5446$

Sudut rujukan,  $\alpha = \sin^{-1}(0.5446)$

$\alpha = 33^\circ$



$\sin \theta$  adalah negatif, jadi  $\theta$  dalam sukuan III dan IV bagi  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ .

$\theta = 180^\circ + 33^\circ$  dan  $360^\circ - 33^\circ$

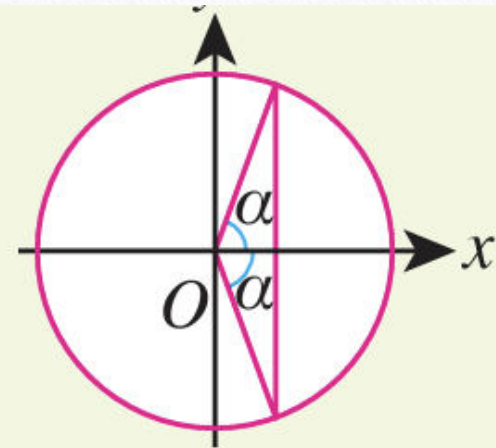
$= 213^\circ$  dan  $327^\circ$

y.

(b)  $\cos 2\theta = 0.3420$

Sudut rujukan,  $\alpha = \cos^{-1} (0.3420)$

$$\alpha = 70^\circ$$



$\cos 2\theta$  adalah positif, jadi  $2\theta$  dalam sukuan I dan IV  
bagi  $0^\circ \leq 2\theta \leq 720^\circ$

$$2\theta = 70^\circ, 360^\circ - 70^\circ, 360^\circ + 70^\circ \text{ dan } 360 + (360^\circ - 70^\circ)$$
$$= 70^\circ, 290^\circ, 430^\circ \text{ dan } 650^\circ$$

$$\theta = 35^\circ, 145^\circ, 215^\circ \text{ dan } 325^\circ$$

**Contoh 28**

Selesaikan persamaan  $3 \sin \left( A + \frac{\pi}{3} \right) = 0.99$  bagi  $0 \leq A \leq \pi$ .

**Penyelesaian**

$$3 \sin \left( A + \frac{\pi}{3} \right) = 0.99$$

$$\sin \left( A + \frac{\pi}{3} \right) = 0.33$$

Sudut rujukan,  $\alpha = \sin^{-1} (0.33)$  ← Tukar kalkulator dalam mod radian  
 $= 0.3363$  rad

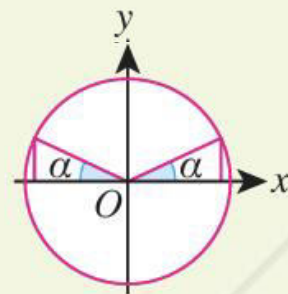
$\sin \left( A + \frac{\pi}{3} \right)$  adalah positif, jadi  $\left( A + \frac{\pi}{3} \right)$  dalam Sukuan I dan II

bagi  $\frac{\pi}{3} \leq A + \frac{\pi}{3} \leq 4.189$ .

$$A + \frac{\pi}{3} = 0.3363 \text{ dan } \pi - 0.3363$$

$$A = 0.3363 - \frac{\pi}{3} \text{ dan } 2.805 - \frac{\pi}{3}$$
$$= -0.7109 \text{ dan } 1.758$$

Maka,  $A = 1.758$  rad.

**Tip Pintar**

Jika menggunakan kalkulator dalam mod darjah:  $\sin^{-1} (0.33) = 19.27^\circ$   
Tukar ke mod radian:  
 $19.27^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$   
 $= 0.3363$  rad



**Contoh**

**29**

Cari nilai  $x$  yang tercangkum di antara  $0^\circ$  dengan  $360^\circ$  yang memuaskan persamaan yang berikut.

(a)  $\sin 2x + \cos x = 0$

(b)  $2 \cos 2x - 13 \sin x + 10 = 0$

## Penyelesaian

$$(a) \quad \sin 2x + \cos x = 0$$

$$2 \sin x \cos x + \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x + 1) = 0$$

$$\text{Jadi,} \quad \cos x = 0 \text{ atau } 2 \sin x + 1 = 0$$

Apabila  $\cos x = 0$ ,

$$x = 90^\circ \text{ dan } x = 270^\circ$$

Apabila  $2 \sin x + 1 = 0$

$$\sin x = -0.5$$

Sudut rujukan,  $\alpha = 30^\circ$

$\sin x$  adalah negatif, jadi  $x$  dalam sukuan III atau IV

$$x = 180^\circ + 30^\circ \text{ dan } 360^\circ - 30^\circ$$

$$= 210^\circ \text{ dan } 330^\circ$$

Maka,  $x = 90^\circ, 210^\circ, 270^\circ$  dan  $330^\circ$ .

Gunakan identiti

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(b) \quad 2 \cos 2x - 13 \sin x + 10 = 0$$

$$2(1 - 2 \sin^2 x) - 13 \sin x + 10 = 0 \quad \leftarrow \text{kos } 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 - 4 \sin^2 x - 13 \sin x + 10 = 0$$

$$4 \sin^2 x + 13 \sin x - 12 = 0$$

$$(4 \sin x - 3)(\sin x + 4) = 0$$

$$\sin x = 0.75 \text{ atau } \sin x = -4 \text{ (abaikan)} \quad \leftarrow 0 \leq \sin x \leq 1$$

Apabila  $\sin x = 0.75$ , sudut rujukan,  $\alpha = 48.59^\circ$

$\sin x$  adalah positif, jadi  $x$  dalam sukuan I dan II.

Maka,  $x = 48.59^\circ$  dan  $131.41^\circ$ .

**ANSWER**

## Latihan Kendiri 6.10

1. Diberi bahawa  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ , cari semua nilai  $x$  yang memuaskan setiap persamaan yang berikut.

(a)  $\sin 2x = -0.4321$

(b)  $\sec (2x + 40^\circ) = 2$

(c)  $\cot \left(\frac{x}{3}\right) = 0.4452$

(d)  $5 \tan x = 7 \sin x$

(e)  $\sin^2 x - 2 \sin x = \cos 2x$

(f)  $\sin (x + 30^\circ) = \cos (x + 120^\circ)$

(g)  $7 \sin x + 3 \cos 2x = 0$

(h)  $\sin x = 3 \sin 2x$

(i)  $\cos (x - 60^\circ) = 3 \cos (x + 60^\circ)$

2. Cari semua sudut yang tercangkum di antara 0 dengan  $2\pi$  yang memenuhi persamaan yang berikut.

(a)  $\sin \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b)  $3 \sin y = 2 \tan y$

(c)  $3 \cot^2 z - 5 \operatorname{cosec} z + 1 = 0$

(d)  $\sin 2A - \cos 2A = 0$

(e)  $\cos B \sin B = \frac{1}{4}$

(f)  $4 \sin (x - \pi) \cos (x - \pi) = 1$

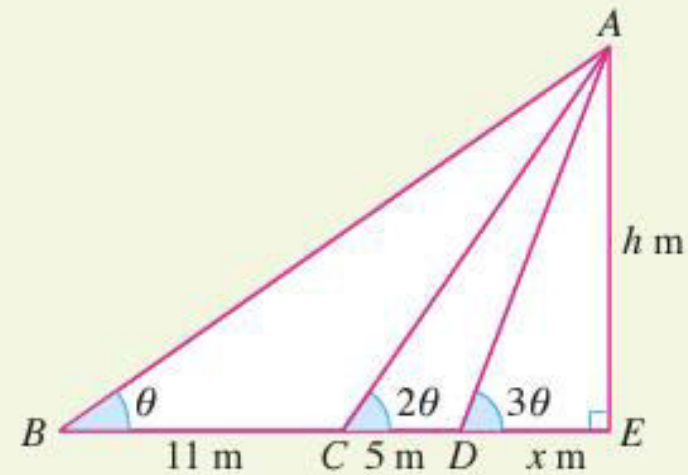


Contoh

30

APLIKASI MATEMATIK

Dalam rajah di sebelah,  $AE$  mewakili tinggi sebuah bangunan. Sudut dongak puncak  $A$  dari titik  $B$ ,  $C$  dan  $D$  masing-masing ialah  $\theta$ ,  $2\theta$  dan  $3\theta$ . Titik  $B$ ,  $C$ ,  $D$  dan  $E$  terletak pada satu garis lurus mengufuk. Diberi  $BC = 11$  m dan  $CD = 5$  m. Jika  $AE = h$  m dan  $DE = x$  m, cari tinggi bangunan itu, dalam sebutan  $x$ .



## Penyelesaian

### 1 . Memahami masalah

- ◆ Diberi  $BC = 11$  m,  $CD = 5$  m,  $DE = x$  m dengan sudut  $\theta$ ,  $2\theta$ , dan  $3\theta$ .
- ◆ Cari tinggi bangunan,  $AE = h$  m.

### 2 . Merancang strategi

- ◆ Cari  $\tan \theta$ ,  $\tan 2\theta$  dan  $\tan 3\theta$ , dalam sebutan  $h$  dan  $x$ .
- ◆ Gunakan identiti  $\tan 3\theta = \tan (\theta + 2\theta)$ .
- ◆ Gantikan ungkapan bagi  $\tan \theta$ ,  $\tan 2\theta$  dan  $\tan 3\theta$ .
- ◆ Permudahkan persamaan untuk mencari  $h$ .

### 3 . Melaksanakan strategi

Didapati bahawa:  $\tan \theta = \frac{h}{16 + x}$

$$\tan 2\theta = \frac{h}{5 + x}$$

$$\tan 3\theta = \frac{h}{x} \text{ dengan } \tan 3\theta = \tan (\theta + 2\theta).$$

$$\frac{h}{x} = \frac{\tan \theta + \tan 2\theta}{1 - \tan \theta \tan 2\theta}$$

$$= \frac{\left(\frac{h}{16 + x}\right) + \left(\frac{h}{5 + x}\right)}{1 - \left(\frac{h}{16 + x}\right)\left(\frac{h}{5 + x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{h(5 + x) + h(16 + x)}{(16 + x)(5 + x)}}{\frac{(16 + x)(5 + x) - h^2}{(16 + x)(5 + x)}}$$

$$= \frac{h(5 + x) + h(16 + x)}{(16 + x)(5 + x) - h^2}$$

$$\text{Jadi, } \frac{1}{x} = \frac{21 + 2x}{80 + 21x + x^2 - h^2}$$

$$80 + 21x + x^2 - h^2 = x(21 + 2x)$$

$$80 + 21x + x^2 - h^2 = 21x + 2x^2$$

$$h^2 = 80 - x^2$$

$$h = \pm\sqrt{80 - x^2}$$

Maka, tinggi bangunan itu ialah  $\sqrt{80 - x^2}$  m.

#### 4 . Membuat refleksi

Katakan  $x$  ialah 4 m. Jadi,  $h = \sqrt{80 - 4^2}$   
 $= 8$  m

$$\begin{aligned}\text{Didapati bahawa: } \tan \theta &= \frac{8}{20} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

$$\tan 2\theta = \frac{8}{9}$$

$$\begin{aligned}\tan 3\theta &= \frac{8}{4} \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 3\theta &= \frac{\tan \theta + \tan 2\theta}{1 - \tan \theta \tan 2\theta} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{8}{9}\right)}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{8}{9}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{18 + 40}{45}\right)}{\left(\frac{45 - 16}{45}\right)} \\ &= \frac{58}{29} \\ &= 2\end{aligned}$$

## Latihan Kendiri 6.11

1. Dalam merancang penerbangan, juruterbang pesawat perlu menentukan kelajuan darat,  $v \text{ kmj}^{-1}$ , pesawat itu dengan mengambil kira laju dan arah angin. Kelajuan darat, dalam  $\text{kmj}^{-1}$ , boleh diungkapkan sebagai

$$v = \frac{770 \sin 135^\circ}{\sin \theta}$$

Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai  $v$ , jika  $\tan \theta = 7$  dan  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ .

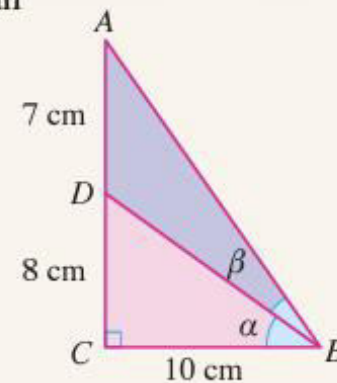
2. Dengan menggunakan identiti  $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$ , cari nilai tepat bagi  $\tan A$  jika  $\sec^2 A + \tan^2 A = 2$ .



3. Elly bercadang untuk menampal kertas hiasan dinding menggunakan teknik kolaj. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga  $ABC$  yang terdiri daripada dua jenis kertas warna. Titik  $D$  terletak di atas  $AC$ , dengan keadaan  $AD = 7 \text{ cm}$ ,  $DC = 8 \text{ cm}$ ,  $BC = 10 \text{ cm}$  dan  $\angle ACB = 90^\circ$ . Untuk mengelakkan pembaziran, Elly perlu mendapatkan ukuran yang tepat bagi kepingan kertas warna tersebut. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $\tan(\alpha + \beta)$       (b)  $\tan \alpha$       (c)  $\tan \beta$

Seterusnya, nyatakan nilai  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\angle BAC$ ,  $\angle ADB$ ,  $\angle BDC$ , panjang  $BD$  dan panjang  $AB$ .



## Latihan Formatif

6.6

Kuiz

[bit.ly/2Q6BzIV](https://bit.ly/2Q6BzIV)



- Selesaikan setiap persamaan trigonometri yang berikut bagi  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ .  
(a)  $2 \cos(x - 10^\circ) = -1$       (b)  $\tan^2 x = \sec x + 2$       (c)  $3 \sin x + 4 \cos x = 0$
- Diberi  $0 \leq A \leq \pi$ , selesaikan setiap persamaan yang berikut.  
(a)  $\sin 2A = \sin 4A$       (b)  $5 \cot^2 A - 4 \cot A = 0$
- Tunjukkan bahawa  $\tan \theta + \cot \theta = \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$ . Seterusnya, selesaikan persamaan  $\sec \theta \operatorname{cosec} \theta = 4 \cot \theta$  bagi  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ .
- Jika  $A$ ,  $B$  dan  $C$  ialah sudut dalam segi tiga  $ABC$ , buktikan bahawa  
(a)  $\sin(B + C) = \sin A$ ,      (b)  $\cos(B + C) = -\cos A$ .



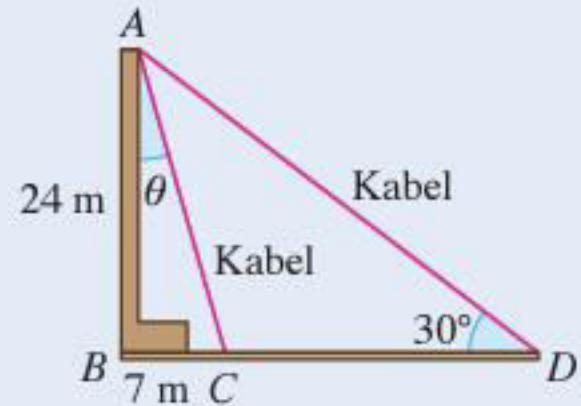
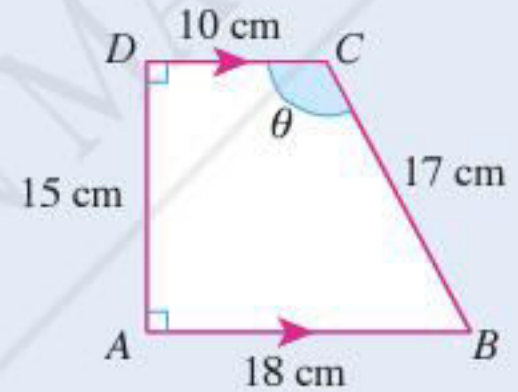
5. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah trapezium  $ABCD$ . Sisi  $AB$  selari dengan  $DC$  dan  $\angle BCD = \theta$ . Cari nilai bagi setiap yang berikut.

- (a)  $\cos \theta$
- (b)  $\sin 2\theta$
- (c)  $\tan 2\theta$

Seterusnya, tentukan nilai  $\theta$ .

6. Sebatang tiang elektrik dikukuhkan oleh dua kabel seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Diberi tinggi tiang,  $AB = 24$  m, jarak  $BC = 7$  m,  $\angle BAC = \theta$  dan  $\angle ADB = 30^\circ$ .

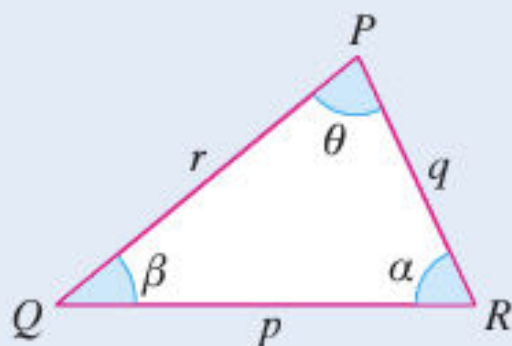
- (a) Tanpa mencari  $\angle CAD$ , hitung nilai  $\sin \angle CAD$ ,  $\cos \angle CAD$  dan  $\tan \angle CAD$ .
- (b) Nyatakan panjang bagi kedua-dua kabel itu.





7. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga  $PQR$  dengan sisi  $p$ ,  $q$  dan  $r$  masing-masing dengan sudut bertentangan  $\theta$ ,  $\beta$  dan  $\alpha$ . Tunjukkan bahawa luas segi tiga tersebut diberi oleh rumus yang berikut.

$$L = \frac{p^2 \sin \beta \sin \alpha}{2 \sin (\beta + \alpha)}$$



8. Diberi sek  $\theta = t$ , dengan keadaan  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Cari nilai bagi setiap yang berikut, dalam sebutan  $t$ .

(a)  $\sin \theta$

(b)  $\cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right)$

(c)  $\tan (\pi - \theta)$

9. Lakarkan graf fungsi  $f(x) = 1 + |\cos x|$  bagi domain  $0 \leq x \leq 2\pi$ .



- (a) Nyatakan julat yang sepadan dengan domain tersebut.

- (b) Seterusnya, dengan melakar graf yang sesuai pada paksi yang sama, nyatakan bilangan penyelesaian bagi  $x|\cos x| = 1 - x$ .



Tamat

---